23/05/2017

Μάθημα 22ο
Απει 4

Τμήμα επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$:

$\bar{\Phi}/A \quad K \to \mathbb{R}^3 \quad \bar{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ όπου $K \in U \subset \mathbb{R}^2$

K συμπαγές και J-μετρήσιμο, U ανοικτό : $\bar{\Phi} : U \to \mathbb{R}^2$ (C^1)

$$D\bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Ορισμός: Έστω $\bar{\Phi}$ μια παραμετρική επιφάνεια όπως πιο πάνω

α) Το διάνυσμα $\bar{N}(u,v) = \frac{\partial \bar{\varphi}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\varphi}(u,v)}{\partial v}$ κάθετο διάνυσμά της.

β) Το $\bar{\varphi}(u,v)$ ονομάζεται κανονικό αν $\bar{N}(u,v) \neq \bar{0}$ (και ιδιάζον αν $\bar{N}(u,v) = \bar{0}$)

γ) Αν το $\bar{\Phi}(u,v)$ είναι κανονικό το $\bar{n}(u,v) = \frac{\bar{N}(u,v)}{\|\bar{N}(u,v)\|}$ ονομάζεται μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της $\bar{\varphi}$ στο σημείο $\bar{\Phi}(u,v)$ και το επίπεδο:

$$\left\{ \bar{\varphi}(u,v) + \lambda \frac{\partial \bar{\varphi}(u,v)}{\partial u} + \mu \frac{\partial \bar{\varphi}(u,v)}{\partial v} \;, \lambda,\mu \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

ονομάζεται εφαπτόμενο επίπεδο της $\bar{\phi}$ στο $\bar{\phi}(u,v)$

Στα παραδείγματα 1-3 (γράφημα συνάρτησης, επίπεδο, σφαίρα)

п.х. 1

$f: U \to \mathbb{R}^3$, $\bar{\phi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \Rightarrow D\bar{\varphi}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ df(x,y) & df(x,y) \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \bar{N}(x,y) = \frac{d\bar{\Phi}}{dx}(x,y) \times \frac{d\bar{\varphi}}{dy}(x,y) = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & df(x,y)/dx \\ 0 & 1 & df(x,y)/dy \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -df(x,y)/dx \\ -df(x,y)/dy \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x,y) \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{n}(x,y) = \frac{1 - \nabla f(x,y,1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2}}$$

Εφαπτόμενο επίπεδο της $\bar{\varphi}(x,y)$ δηλ. του γραφήματος $\mathbb{R}^3 \supset \bar{\varphi}(K) = \{ (x,y,f(x,y)) \;\; (x,y) \in K \} = \Gamma_{f/K}$ στο σημείο $\bar{\Phi}(x_0,y_0)$ είναι:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial f(x_0,y_0)/dx \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial f(x_0,y_0)/dy \end{pmatrix} \quad ,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

Για $\mu < 0$ έχουμε την εφαπτόμενη ευθεία στο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ στην κατεύθυνση των x και αντίστοιχα για $\lambda > 0$

π.χ. 2.

$$\bar{\varphi}\underbrace{(\lambda,\mu)}_{\in \mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{= \bar{a}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{= \bar{b}}$$

Ο πίνακας είναι 3x2

$$D\bar{\varphi}(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = (\bar{a}; \bar{b})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{\varphi}(\lambda,\mu)}{\partial \lambda} = \bar{a}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}(\lambda,\mu)}{\partial \mu} = \bar{b}$$

$\bar{N}(\bar{a},\bar{b}) = \bar{a} \times \bar{b} \ (\perp \bar{a}, \perp \bar{b})$

$\bar{n}(\bar{a},\bar{b}) = \dfrac{\bar{a} \times \bar{b}}{\|\bar{a} \times \bar{b}\|}$, η $\bar{\varphi}$ είναι κανονική αν $\bar{a} \times \bar{b} \neq \bar{0} \Leftrightarrow$

$\bar{a}, \bar{b}$ γραμ. ανεξάρτητα και το εφαπτόμενο επίπεδο = το ίδιο το επίπεδο.

$$\begin{pmatrix} x(\theta,\varphi) \\ y(\theta,\varphi) \\ z(\theta,\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Παράδειγμα 3:

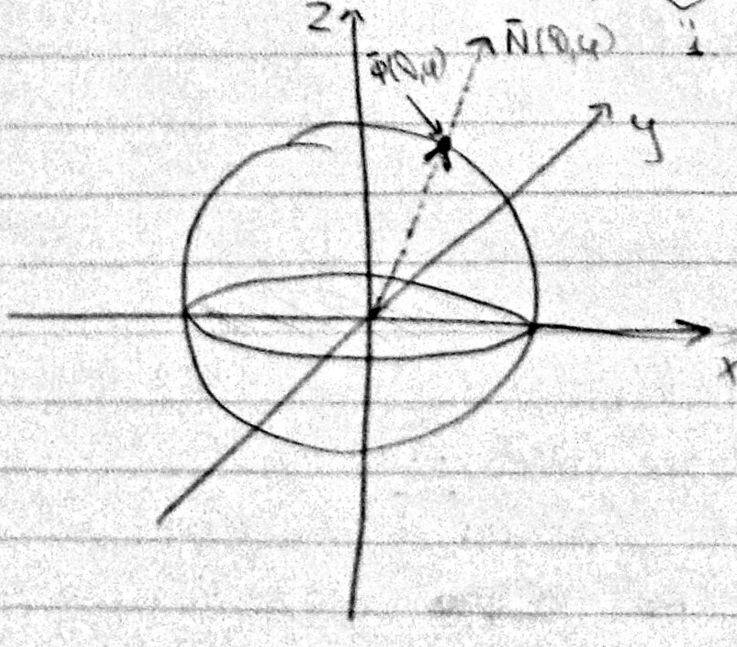
Η σφαίρα $\bar{\varphi}(\theta,\varphi) = r\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $(\theta,\varphi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi)$

$$\Rightarrow D\bar{\varphi}(\theta,\varphi) = r\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \underbrace{-\sin\theta}_{=\frac{\partial\bar{\varphi}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}} & \underbrace{0}_{=\frac{\partial\bar{\varphi}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}} \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε: $\cos = c$, $\sin = s$ $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \bar{N}(\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ rc\theta c\varphi & rc\theta s\varphi & -s\theta r \\ -rs\theta s\varphi & rs\theta c\varphi & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{N}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\theta\,(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}) \end{pmatrix}\cdot r = r^2\sin\theta\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \boxed{\bar{N}(\theta,\varphi) = r\sin\theta\,\bar{\varphi}(\theta,\varphi)}$$

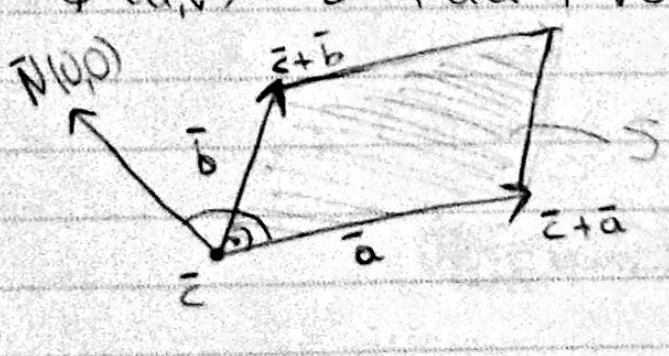
$$\|\bar N(\theta,\varphi)\|^2 = r^4 \sin^2\theta \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} s\theta\, c\varphi \\ s\theta\, s\varphi \\ c\theta \end{pmatrix}\right\|}_{\underbrace{s^2\theta\, c^2\varphi + s^2\theta\, s^2\varphi}_{s^2\theta} + c^2\theta = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\bar N(\theta,\varphi)\| = r^2 \sin\theta \geq 0}$$

$\Rightarrow$ η επιφάνεια της σφαίρας με αυτήν την παραμετρικοποίηση είναι κανονική (διότι $\bar N(\theta,\varphi) \neq \bar 0$) $\forall \theta \in (0,\pi)$ Το κάθετο διάνυσμα είναι πολλαπλάσιο του διανύσματος θέσης του σημείου $\bar\Phi(\theta,\varphi)$ της επιφάνειας της σφαίρας και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι $\boxed{\bar n(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}$

Εμβαδό Επιφάνειας (= επιφ. ολοκλήρωμα της πραγμ. συνάρτησης $f=1$)

Παράδειγμα / βασική ιδέα: Έστω ότι έχουμε το τμήμα του επιπέδου $\bar\Phi(u,v) = \bar c + u\bar a + v\bar b$, $u,v \in [0,1]$

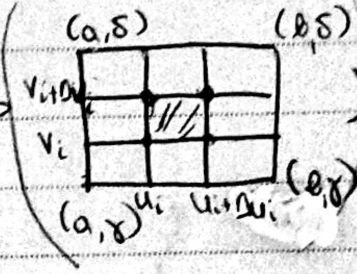


(διότι είναι παραλληλόγραμμο πάνω στο επίπεδο ($u,v \in \mathbb{R}$))
Το $\bar\Phi$ έχει σε κάθε σημείο το κάθετο διάνυσμα $\bar N(u,v) = \bar a \times \bar b$
και από τις ιδιότητες του διανυσματικού γινομένου έχουμε ότι

$\|\hat{a}\times\hat{b}\|$ = εμβαδό του $\bar{\Phi}(\overbrace{[0,1]\times[0,1]}^{K}) = S$

Για μια οποιαδήποτε επιφάνεια μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό ως εξής:

Έστω $K=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]\subset\mathbb{R}^2$ (κλειστό ορθογώνιο)



Αν πάρουμε μια διαμέριση του K σε κλειστά ορθογώνια μπορούμε να προσεγγίσουμε την $\bar{\Phi}$ περιορισμένη στο υποορθογώνιο:

$[u_i, u_i+\Delta u_i]\times[v_i, v_i+\Delta v_i]\subset K$

μέσω της:

$$\bar{\Phi}_i(u,v) = \bar{\Phi}(u_i,v_i) + u\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial u}(u_i,v_i) + v\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial v}(u_i,v_i),$$

$$(u,v)\in[0,\Delta u_i]\times[0,\Delta v_i]$$

Αυτά τα $\bar{\Phi}_i$ έχουν εμβαδό $\|\bar{N}(u_i,v_i)\|\Delta u_i\Delta v_i$

Συνεπώς προσεγγιστικά το εμβαδό της επιφάνειας είναι

$$\sum_{\text{υποορθ.}}\|\bar{N}(u_i,v_i)\|\Delta u_i\Delta v_i \xrightarrow[\text{όλο και πιο λεπτή}]{\text{διαμέριση}} \int_K\|\bar{N}(u,v)\|\,d(u,v) =: A(\bar{\Phi})$$

για $\bar{\Phi}:K\to\mathbb{R}^3$

Άρα: Το εμβαδό της επιφάνειας $\bar{\Phi}:K\to\mathbb{R}^3$ είναι:

$$A(\bar{\Phi}) = \int_K \|\underbrace{\bar{N}(u,v)}_{=\,\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial v}(u,v)}\|\,d(u,v)$$

Παράδειγμα: Εμβαδό της σφαίρας ακτίνας r

$$\bar{\Phi}(\theta,\varphi) = r\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}, \quad (\theta,\varphi)\in \overbrace{[0,\pi]\times[0,2\pi]}^{=K}$$

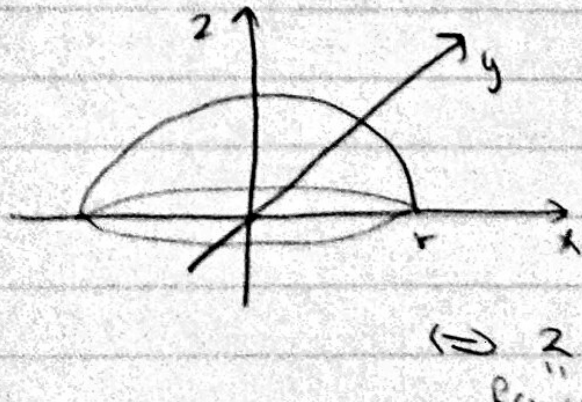
$$\Rightarrow \int A(\bar{\Phi}) = \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} r^2\sin\theta\, d(\theta,\varphi) =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, d\ d\theta = 2\pi r^2 \underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta}_{2} = 4\pi r^2$$

$$\rightarrow \|\bar{N}(\theta,\varphi)\| = r^2\sin\theta$$

> Ερώτημα: Θα αλλάξει το εμβαδό μιας επιφάνειας $S\subset\mathbb{R}^3$ αν αλλάξουμε την παραμετροποίηση; ΟΧΙ

> Εκφώνηση: Υπολογίστε το εμβαδό του άνω ημισφαιρίου ακτίνας $r>0$ και κέντρου $(0,0)$ ως γράφημα συνάρτησης



$$\bar{\Phi}: K\to\mathbb{R}^3, \quad \Phi(x,y) = \begin{pmatrix}x\\ y\\ f(x,y)\end{pmatrix}, \quad (x,y)\in K\subset\mathbb{R}^2$$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2 \overset{z\geq 0}{\iff}$$

$$\iff \underset{f(x,y)}{\overset{\parallel}{z}} = \underbrace{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2\leq r^2$$

$$\Rightarrow K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq r^2\}$$

$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \; ; \; (x,y)\in K\} = \bar{\Phi}(K)$

$\|\bar{N}(x,y)\| = \sqrt{1+\|\nabla f(x,y)\|^2}$

Προς επιβεβαίωση του "ΟΧΙ":

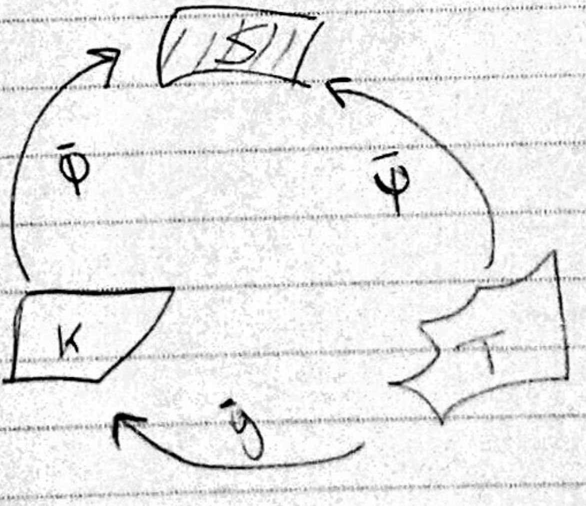
Ορισμός: Έστω $S=\bar{\Phi}(K)$ με $K\subset U\subset\mathbb{R}^2$, $\bar{\Phi}:U\to\mathbb{R}^3$ $\bar{\Phi}$ C^1
και $S=\bar{\Psi}(T)$ με $T\subset V\subset\mathbb{R}^2$, $\bar{\Psi}:V\to\mathbb{R}^3$, $\bar{\Psi}$ C^1

K,T -> συμπαγή, J-μετρήσιμα

V,U -> ανοικτά.

Έστω $\bar{g}: V\to U$ 1-1 και C^1 με $D\bar{g}(s,t)\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ αντιστρέψιμος $\forall (s,t)\in V$ και $\bar{g}(T)=K$.

Τότε θα λέμε ότι η $\bar{g}$ είναι ένας (επιτρεπτός) παραμετρικός μετασχηματισμός από το K στο T.



Αν $\det D\bar{g}(s,t)>0$ $\forall (s,t)\in T$ λέμε ότι ο μετασχηματισμός $\bar{g}$ διατηρεί τον προσανατολισμό

Αν $\det D\bar{g}(s,t)<0$ $\forall (s,t)\in T$ λέμε ότι ο μετασχηματισμός $\bar{g}$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Πρόταση: Έστω $U,V\in\mathbb{R}^2$ ανοικτά, $K\subset U$, $T\subset V$, συμπαγή και J-μετρ., $\bar{g}: V\to U$ ένας (επιτρ.) παραμετρικός μετασχηματισμός από το K στο T και έστω η επιφάνεια $\bar{\Phi}$ με παραμετρικό πεδίο K ($\bar{\Phi}/K: K\to\mathbb{R}^3$, C^1) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ η επιφάνεια $\bar{\Psi}=\bar{\Phi}\circ\bar{g}$ με παραμετρ. πεδίο

T $\left(\bar{\Psi}|_T : T \to \mathbb{R}^3 \; (C^1) \right)$ και εικόνα $\bar{\Psi}(T) = \bar{\varphi}(\overbrace{\bar{g}(T)}^{K}) \subset \mathbb{R}^3$
έχει εμβαδό $A(\bar{\Psi}) = A(\bar{\Phi})$

<u>Προσοχή / Παρατήρηση:</u> Δε λέει κάτι για προσανατολισμό $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ το εμβαδό είναι ανεξ. του προσανατολισμού

Απόδειξη:

$$A(\bar{\Psi}) = \int_T \left\| \underbrace{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}(s,t)} \right\| d(s,t) =$$

$$= \int_T \left\| \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u} \bar{g}(s,t) \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v} \bar{g}(s,t) \right\| \left| \det D\bar{g}(s,t) \right| d(s,t) \overset{\text{ΚΑΜ}}{=}$$

ΚΑΜ $$\int_{\bar{g}(T)=K} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) \right\| d(u,v) = A(\bar{\Phi}).$$